Příklad: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ... Taylorova řada exp na $\mathbb{R}$.

Weierstrassovo kr.: Pokud

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in M: \ |u_n(x)| \le a_n \ (\in \mathbb{R})$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, (suma čísel)

potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na M.

Zkusíme W.KR.: Položíme (pro n pevné)

$$a_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \infty \quad \text{(zřejmé)}.$$

$$\sum a_n = \text{"} \sum \infty \text{"} \quad \text{DIVERGUJE}.$$

" W.KR. nám neříká nic.

Nutná podmínka pro $\sum u_n \rightrightarrows$?

Pokud $\sum u_n \rightrightarrows$ na M,

pak $u_n \rightrightarrows 0$ na M.

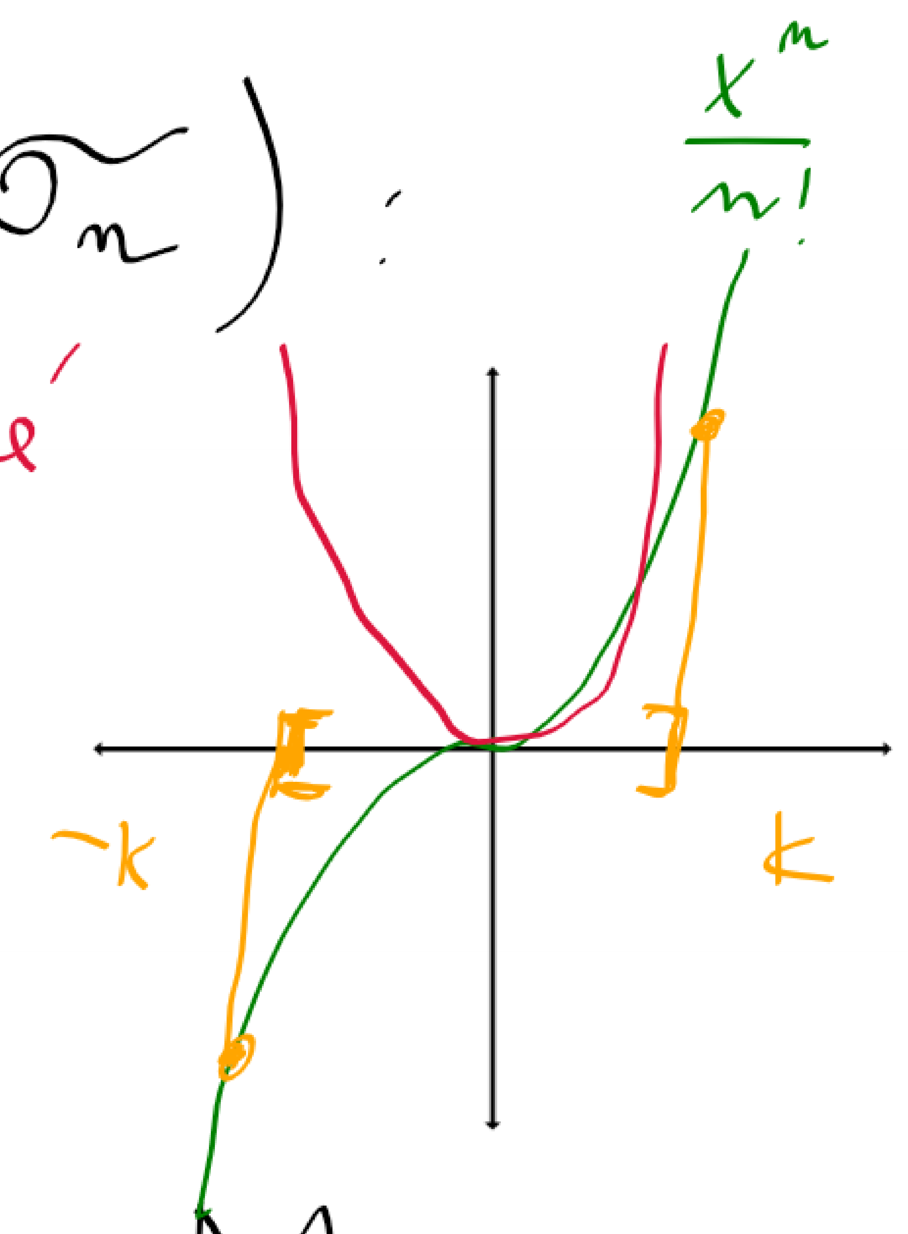
Zde tedy použijeme $(L \text{ o } \sigma_n)$:

n liché

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |u_n(x)|$$

n sudé $\frac{x^n}{n!}$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \infty$$



Podle L: $u_n \rightrightarrows 0$ na M $\iff$

$\iff \sigma_n \to 0$ (posl. čísel).

$\sigma_n \not\to 0$, a tedy $u_n \not\rightrightarrows 0$ na M.

Tj. není splněna nutná podmínka

a řada $\sum \frac{x^n}{n!} \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

na intervalu $[-k,k]$ $(k>0)$:

W. KR. $a_n = \sup_{x\in[-k,k]} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{k^n}{n!}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}$ konverguje.

Pomocí podílového kritéria:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{k^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n+1} = 0,$

takže $(0<1)$ $\sum a_n$ K.

Závěr: W. KR. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows e^x$ na $[-k,k]$

Shrnutí: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$, ALE

$\forall k>0$ $\rightrightarrows$ na $[-k,k]$.

Přitom $\mathbb{R} = \bigcup_{k>0} [-k,k]$.

Pozn.: Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na M_i, $i\in\{1,\dots,p\}$

pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{p} M_i$.

Podstatné je, že sjednocujeme pouze konečně mnoho množin.

$\mathbb{R}$ ale není konečným sjed. intervalů tvaru $[-k,k]$.

Tomuto jevu se říká lokálně stejnoměrná konvergence té řady na $\mathbb{R}$, značeno

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$

Příklad: Uvažujme řadu:

$$\underbrace{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}}_{s_3}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\dots=\cos x,\quad x\in\mathbb{R}$$

Podobně jako T.Ř. exp tato řada $\not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

Existuje mnohem jednodušší argument:

Zřejmé: Částečné součty s_N této ř. jsou neomezené funkce (kromě s_1).

Ale součet je omezená fce cos.

Protože neomezenost se $\rightrightarrows$ zachovává, plyne z toho, že $\rightrightarrows$ (na $\mathbb{R}$) nenastává.

[7405] $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\ln\left(1+\frac{x^2}{n\cdot \ln^2 n}\right)}_{u_n(x)\,\geq\, 0}$ na $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: u_n je sudá.

W.KR. $a_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = \infty = \sigma_n$

$\sigma_n \not\to 0 \Rightarrow u_n \not\rightrightarrows 0 \overset{N.P.K.}{\Rightarrow} \sum \not\rightrightarrows$.

na $[-K,K]$, $K>0$ (lokálně stejn. k.):

W.KR. $a_n = \sup_{x\in[-K,K]} \left|\ln\left(1+\frac{x^2}{n\cdot \ln^2 n}\right)\right| =$

$= \sup_{x\in[0,K]} \underbrace{\ln\left(1+\underbrace{\frac{x^2}{n\cdot\ln^2 n}}_{\text{rostoucí}}\right)}_{\text{rostoucí}} = \ln\left(1+\frac{K^2}{n\cdot \ln^2 n}\right)$

rostoucí

$\underline{\sum a_n \;\; K?}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{K^2}{n\cdot \ln^2 n}\right)$, $\frac{K^2}{n\cdot\ln^2 n} \to 0$

SROVNÁVACÍ (lim) KR.:

$b_n = \frac{K^2}{n\cdot \ln^2 n}$ $\quad \sum b_n = K^2 \cdot \sum \frac{1}{n\cdot \ln^2 n}$

$\sum \frac{1}{n\cdot \ln^\alpha n}$ K $\iff \alpha > 1$

(Dk. pomocí integrálního kritéria.)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\ln\left(1+\frac{K^2}{n\cdot \ln^2 n}\right)}{\frac{K^2}{n\cdot\ln^2 n}} = 1$, $\frac{K^2}{n\cdot\ln^2 n}\to 0$.

Tedy $\sum a_n$ K $\iff \sum b_n$ K.

$\sum a_n$ K. $\overset{W.KR.}{\Rightarrow} \sum u_n \rightrightarrows$

H.V. $c_n = \frac{K^2}{n\cdot \ln^2 n} \to 0$ (H1) (H2) $c_n \neq 0$, $n\in\mathbb{N}$.

$f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$, $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$

[Z400] $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ na $\mathbb{R}$.

1. KROK: Bodová limita:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=\sqrt{x^2} = |x| =: f(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

2. KROK: $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$? Pomocí σ_n.

$$\sigma_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x) - \boxed{f(x)}\right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\overbrace{\underbrace{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}_{>\sqrt{x^2}=|x|} - |x|}^{>0}\right| =$$ kladnost, sudost

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - \underbrace{|x|}_{\sqrt{x^2}}\right) =$$

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x} = \sup_{[0,\infty)} \frac{\frac{1}{n^2}}{\boxed{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x}} =$$

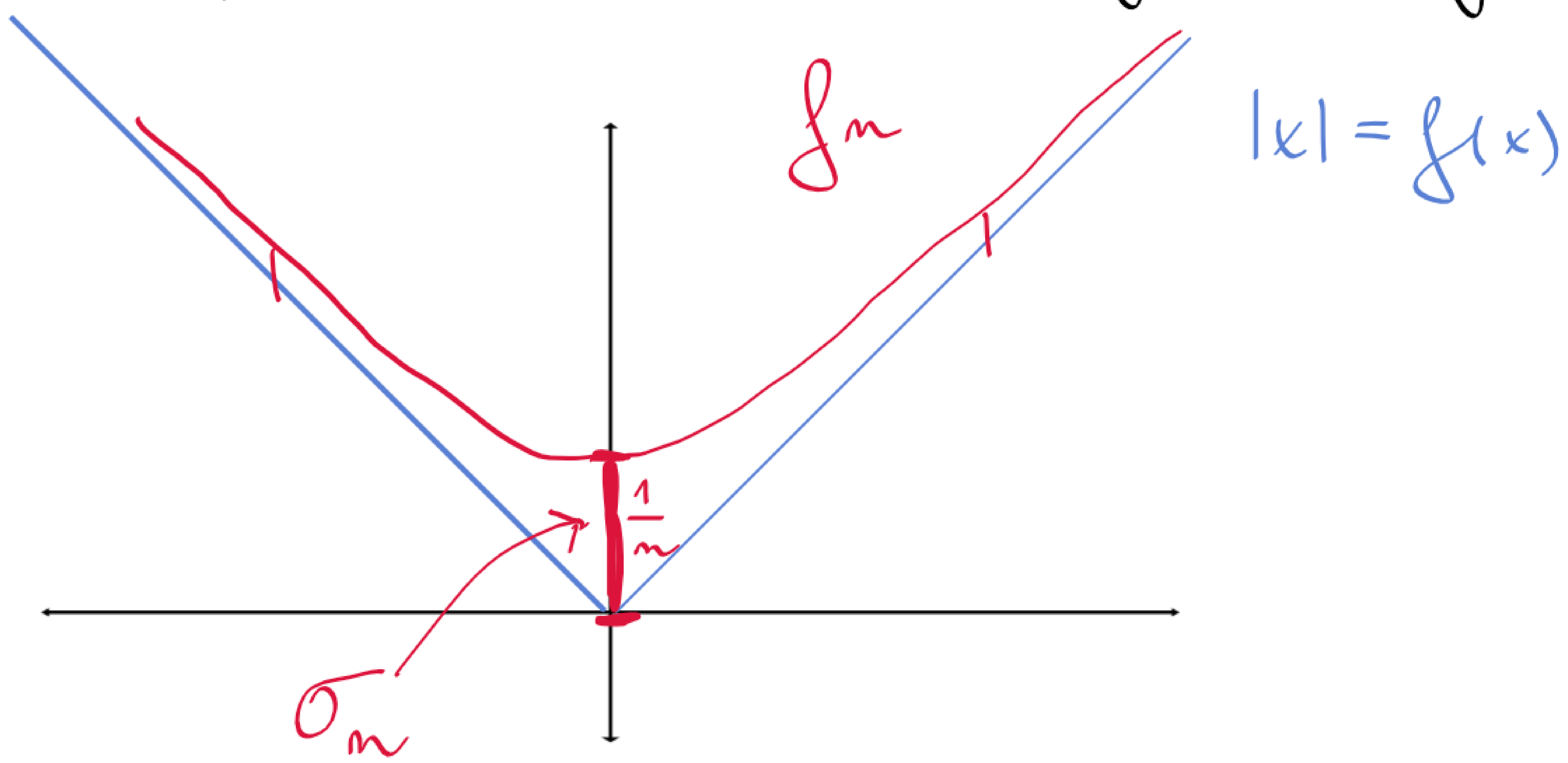
klesá

rostoucí

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{0^2+\frac{1}{n^2}}+0} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} = \sigma_n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Tedy podle LOσ_n: $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.



[Z402*] $f_n(x) = x\cdot \operatorname{arctg} nx \quad , \ x\in\mathbb{R}$

1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x\cdot \operatorname{arctg} nx = x\cdot \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x =$

$= \frac{\pi}{2}\cdot |x|$.

2) $\sigma_n = \sup\limits_{\mathbb{R}} \left| x\cdot\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}|x| \right| =$

$= \sup\limits_{\mathbb{R}} \left| x\cdot\left(\underbrace{\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn} x}_{<0}\right)\right| =$

$= \sup\limits_{(0,\infty)} \left(\underbrace{\frac{\pi}{2}x - x\cdot\operatorname{arctg} nx}_{g_n(x)}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} g_n(x)$

$g_n'(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx - \frac{x\cdot n}{1+n^2x^2} =$

$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx - \frac{nx}{1+n^2x^2} >$

$\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}\right]$

$g_n'' = -\frac{n}{1+n^2x^2} - \frac{n\cdot(1+n^2x^2) - x\cdot n\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} =$

$= -\frac{\cancel{n(1+n^2x^2)} + \cancel{n(1+n^2x^2)} - x^2\cdot 2n^3}{(1+n^2x^2)^2} =$

$= \frac{-1}{(\ )^2}\cdot\left(2n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2\right) = \frac{-1}{(\dots)^2}\cdot 2n$

g_n' je $\boxed{\text{ryze}}$! monotónní, $g_n'(x) \longrightarrow 0$, $x\to\infty$

$\Longrightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}: \ g_n'(x) \neq 0$, takže

g_n je monotónní.

$$\lim_{x\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}x - x\,\mathrm{arctg}\, nx\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, nx\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, nx}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-n}{1+n^2x^2}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot n}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n} = \sigma_n$$

$\sigma_n \to 0$, a tedy $f_n \rightrightarrows f$. $\square$